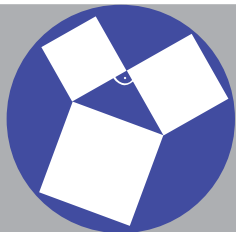
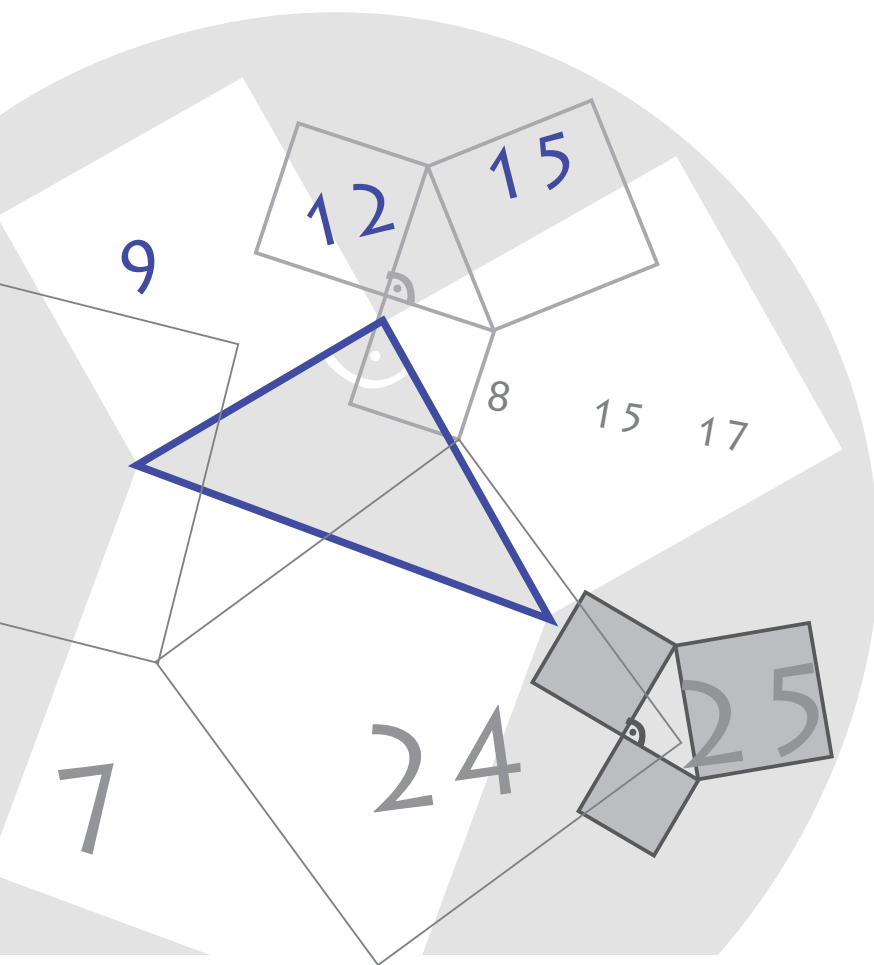




**LABORATORIUM
DYDAKTYKI CYFROWEJ**
DLA SZKÓŁ WOJEWÓDZTWA
MAŁOPOLSKIEGO



TWIERDZENIE PITAGORASA I WSKAZYWANIE DŁUGOŚCI BRAKUJĄCEGO BOKU TRÓJKĄTA PROSTOKĄTNEGO



MATEMATYKA



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Matopolska



www.mcdn.edu.pl



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Poradnik powstał w wyniku współpracy zespołu nauczycieli, trenerów i autorów:

Ewa Barszcz, Krzysztof Grynienko, Marta Herduś, Piotr Kryszkiewicz, Maciej Krzywda-Pogorzelski

Twierdzenie Pitagorasa i wskazywanie długości brakującego boku trójkąta prostokątnego



Czas trwania zajęć: jedna jednostka lekcyjna



Cel zajęć



Cele wynikające z podstawy programowej

Uczeń:

- stosuje twierdzenie Pitagorasa (10.7)
- korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i w trapezach (10.8)



Cele operacyjne osiągnane przez uczniów

Uczeń:

- oblicza długość przeciwprostokątnej, gdy zna długości przyprostokątnych trójkąta
- oblicza długość przyprostokątnej, gdy zna długości pozostałych boków
- oblicza wysokość trójkąta równoramiennego o znanych długościach boków
- stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa w celu sprawdzenia, czy trójkąt o podanych długościach boków jest: ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny
- oblicza długość boku prostokąta, gdy zna długość drugiego boku i przekątną
- oblicza wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, gdy zna długości krawędzi podstawy i krawędzi bocznej

Wiedza i umiejętności wejściowe ucznia

Uczeń potrafi przed lekcją:

- pierwiastkować liczby, w szczególności wyłączać czynnik kwadratowy przed pierwiastek, np. $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$
- podnosić do kwadratu liczby, w zapisie których występuje pierwiastek kwadratowy, np. $3\sqrt{5}$
- stosować zależność między długością boku, a długością przekątnej w kwadracie w obie strony, tak aby nie stosować do tego problemu twierdzenia Pitagorasa, a od razu mnożyć, albo dzielić przez $\sqrt{2}$



Organizacja lekcji

Infrastruktura

- Układ miejsc do pracy grupowej w zespołach trzyosobowych
- Urządzenie z dostępem do Internetu dla każdego z zespołów
- Rzutnik podłączony do komputera nauczyciela z dostępem do Internetu

Zasoby

- Formularz gry w arkuszu Google <http://goo.gl/xkYp6o>
- Załącznik nr 1 – Pitagoras – treść zadań z kluczem odpowiedzi
- Załącznik nr 2 – Pitagoras – instrukcja do gry
- Załącznik nr 3 – Pitagoras – kody QR

Przygotowanie do lekcji

- Stworzenie kopii arkusza do gry <http://goo.gl/xkYp6o> dla danej rozgrywki
- wydrukowanie kodów QR z odnośnikami do zadań do gry w dokumentach Google
- umieszczenie kartek z kodami QR na tablicy zgodnie z oznaczeniami
- przygotowanie kolorowych kartek z papieru do podziału uczniów na zespoły
- przygotowanie kartek do zapisu odpowiedzi uczniów w takich samych kolorach jakie są na karteczkach do podziału na grupy – każda grupa otrzymuje taki kolor jaki wylosowała
- przygotowanie długopisów lub ołówek dla grup
- przygotowanie rankingu w formularzu Google do wprowadzania wyników poszczególnych zespołów
- otwarcie na komputerach uczniów aplikacji służącej do skanowania kodów QR (pod adresem: <http://webqr.com>)
- Wydrukowanie po jednej kopii dla grupy instrukcji do gry

Przebieg procesu dydaktycznego



LEKCJA

Czas: 2 min	Organizacja lekcji i podział na zespoły Przy wejściu do klasy uczniowie losują kolorowe karteczki z papieru (w pięciu kolorach odpowiadających kolorom poszczególnych grup). Podzieleni na grupy uczniowie wchodzi do sali. W tej części jest także czas na powitanie uczniów oraz sprawy organizacyjne jak sprawdzenie obecności, przedstawienie celów lekcji
Czas: 5 min	Przypomnienie najważniejszych informacji o twierdzeniu Pitagorasa Przypomnij uczniom najważniejsze informacje o trójkątach prostokątnych oraz twierdzeniu Pitagorasa Prezentacja online http://goo.gl/vx5nUI
Czas: 3 min	Wprowadzenie do gry Przedstaw uczniom zasady gry oraz wyświetl je na prezentacji. Prezentacja online http://goo.gl/vx5nUI
Czas: 30 min	Rozgrywka Przeprowadzenie gry zgodnie z instrukcją do gry 1. Na tablicy wiszą kartki z wydrukowanymi kodami QR w trzech kategoriach punktowych o różnym poziomie trudności (za 3, 4, 5 punkty) 2. W każdej kategorii jest 7 zadań

3. Uczniowie – przedstawiciele grup – podchodzą do tablicy i wybierają i skanują na laptopie kod QR, który jest odnośnikiem do zadania w Dokumentcie Google
4. Uczniowie w grupie rozwiązują zadanie
5. Po rozwiązaniu zadania uczniowie proszą nauczyciela o sprawdzenie poprawności rozwiązania.
6. Przyznaj punkty na formularzu online zgodnie z kluczem i zasadami punktacji w instrukcji do gry
7. Po wpisaniu punktów do arkusza, aktualne wyniki zostaną automatycznie wyświetlone w rankingu na ekranie

Na ekranie jest podgląd aktualnej punktacji
w postaci wykresu / rankingu gry

Nauczyciel ma urządzenie na którym przyznaje punkty
za wykonane zadania

Czas: 5 min

Podsumowanie

Po zakończeniu gry podsumowuj wyniki gry i pogratuluj zwycięzcom. Pokaż na tablicy rozwiązanie zadań, które sprawiły uczniom największą trudność. Jeśli nie wystarczy czasu na danej lekcji, aby omówić zadania sprawiające problemy, tego typu podsumowania może mieć miejsce na kolejnej lekcji.

Przyznaj oceny za wyniki drużyn zgodnie z określonym na początku lekcji systemem oceniania w grze.

Ekran rankingu wyświetlone na ekranie

Informacje metodyczne

Metodyka lekcji

Gamifikacja pomaga motywować uczniów w sposób wewnętrzny. Natychmiastowe punktowanie osiągnięć, sygnalizowanie przejścia do kolejnego poziomu, bezpośredni i interaktywny udział ucznia – to zarówno wymagania jak i atuty gamifikacji. Jeśli uda się zrównoważyć potrzebę nauczania konkretnego materiału z zaplanowaną ciekawą mechaniką fragmentów gry – niemal każda lekcja stanie się dla uczniów interesującym wyzwaniem.

Warto zwrócić uwagę na sposób podziału na zespoły – tutaj wybrano metodę losową, zapobiegającą celowemu dobraniu zespołów lepszych i słabszych. Sama praca zespołowa w grze, uczy w naturalnych dla uczniów okolicznościach umiejętności współpracy, którą mogą łatwiej przenieść na inne modele edukacyjne.

ZOBACZ PORADNIK
GAMIFIKACJA



SCENARIUSZ 18 – BEZ GRY ONLINE

ZAŁĄCZNIK NR 1 – PITAGOREJCZYCY

– TREŚĆ ZADAŃ Z KLUCZEM ODPOWIEDZI

Etap 1.

Trójkąty pitagorejskie. Na ekranie komputera wyświetla się trójkąt z zaznaczonymi długościami przystosowanymi.

Polecenie: Oblicz długość przeciwprostokątnej. Zapisz swoje obliczenia

Zad A1 Trójkąt I: (7, 24, x).

$$x = \underline{25}$$

Zad B1 Trójkąt s: (9, 40, x).

$$x = \underline{41}$$

Zad C1 Trójkąt t: ($\sqrt{7}$, $2\sqrt{2}$, x).

$$x = \underline{\sqrt{15}}$$

Etap 2.

Długość odcinka o końcach kratowych. Na ekranie w układzie współrzędnych (I ćwiartka) z narysowaną jednostkową siatką zaznaczone są dwa punkty A i B, wraz z ich współrzędnymi. Wyznacz długość odcinka AB. Zapisz swoje obliczenia

Polecenie: Wskaż długość odcinka AB..

Zad A2 Odcinek I: A = (0,0), B = (5,12).

$$|AB| = \underline{13},$$

Zad B2 Odcinek s: A = (3,1), B = (6,5).

$$|AB| = \underline{5}$$

Zad C2 Odcinek t: A = (1,2), B = (8,3).

$$|AB| = \underline{5\sqrt{2}}$$

Etap 3.

Rodzaj trójkąta. Zastosowanie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa. Na ekranie podane są długości boków trójkąta. Należy sprawdzić, czy trójkąt jest prostokątny.

Polecenie: Czy trójkąt o podanych długościach boków jest prostokątny? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Zad A1 Trójkąt I: (21; 20; 30)

NIE

Zad B3 Trójkąt s: (1,2; $1\frac{3}{5}$; 2)

TAK

Zad C3 Trójkąt t: ($2\sqrt{3}$, $2\sqrt{7}$, 4)

TAK

Etap 4.

Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do obliczania pola trójkąta równoramiennego. Na ekranie widać trójkąt równoramienny z zaznaczonymi długościami boków. Należy wskazać pole trójkąta, po uprzednim obliczeniu długości wysokości.

Polecenie: Oblicz pole trójkąta o podanych długościach boków.

Zad A4 Trójkąt l: (10, 13, 13). $\frac{60}{2}$,

Zad B4 Trójkąt s: (16, 17, 17). $\frac{120}{2}$,

Zad C4 Trójkąt t: (9, 9, 10) $\frac{5\sqrt{56}}{2}, \frac{10\sqrt{14}}{2}$,

Etap 5.

Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do obliczenia pola rombu o podanym obwodzie i długości jednej z przekątnych. Należy wskazać pole rombu. Na rysunku widać romb z zaznaczoną właściwą przekątną. Wzór na pole z długości przekątnych jest widoczny na ekranie.

Polecenie: Oblicz pole rombu o obwodzie L i przekątnej długości e.

Zad A5 Romb l: (L=40, e=16). 96,

Zad B5 Romb s: (L=60, e=24). 216

Zad C5 Romb t: (L=4 $\sqrt{19}$, p=4). 4 $\sqrt{15}$,

Etap 6.

Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do wyznaczenia wysokości ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Na ekranie widać ostrosłup z wyświetlonymi długościami krawędzi podstawy a oraz krawędzi bocznej b. Oblicz długość wysokości tego ostrosłupa.

Polecenie: Wskaż długość ostrosłupa.

Zad A6 Ostrosłup l: (a=4, b=5). $\sqrt{17}$,

Zad B6 Ostrosłup s: (a=6 $\sqrt{2}$, b=10). $\frac{8}{3}$,

Zad C6 Ostrosłup t: (a=4 $\sqrt{5}$, b=7). 3

Etap 7.

Na ekranie wyświetla się:

PRZEPIS NA TRÓJKI PITAGOREJSKIE

Pomyśl dwie liczby naturalne dodatnie m i n, takie, że:

- $m > n$
- m i n nie mają wspólnego dzielnika (poza 1)
- jedna z tych liczb jest parzysta, a druga nieparzysta (obojętnie która).

Wówczas liczby $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ są całkowitymi długościami boków PEWNEGO trójkąta prostokątnego. Mówiąc inaczej, trójka $a - b - c$ jest „pitagorejska”, jak np. 3–4–5.

Przykład: Przyjmijmy takie dwie liczby: $m = 2$, $n = 1$.

Wtedy $a = 2^2 - 1 = 3$, $b = 2 * 2 * 1 = 4$, $c = 2^2 + 1 = 4$, co daje 3–4–5!

Uwaga: Ten przepis nie tworzy trójek zwielokrotnionych, takich jak: 6–8–10, czyli dwukrotności trójki 3–4–5.

Zadanie . Dla podanych liczb m i n należy wskazać obwód trójkąta prostokątnego wygenerowanego przez te liczby.

Zad A7 Przypadek 1. $m = 5$, $n = 4$. 90

Zad B7 Przypadek 2. $m = 10$, $n = 5$. 300,

Zad C7 Przypadek 1. $m = 15$, $n = 4$. 570



SCENARIUSZ 18 – BEZ GRY ONLINE

ZAŁĄCZNIK NR 2 – PITAGOREJCZYCY – INSTRUKCJA DO GRY

Liczba graczy:

5 drużyn 3-osobowych; Grupa wiekowa: 14+

Cel gry:

zdobycie oceny celującej z matematyki

Przygotowanie do gry:

każda grupa dysponuje 7 kartkami w kolorach drużyny

(do zapisywania rozwiązania, każde zadanie na oddzielnej kartce) i długopisem.

Zasady gry:

1. Gra polega na rozwiązaniu jak największej liczby zadań z listy zadań w tabeli.
2. Przedstawiciel drużyny dokonuje wyboru zadania z tabeli, grupa rozwiązuje zadanie wspólnie. Następnie rozwiązanie z numerem zadania zostaje oddane nauczycielowi, który po sprawdzeniu przyznaje punkty.
3. Z każdego etapu możesz rozwiązać dowolną ilość zadań, ale punkty zostaną przyznane tylko za jeden poziom.
4. Wraz ze wzrostem numeru zadania wzrasta złożoność zadania.
5. W przypadku niepowodzenia możesz wybrać zadanie z tego samego etapu, ale z niższą punktacją.
6. Za błędne rozwiązania nie przyznajemy żadnych punktów (musi być poprawna metoda rozwiązania i obliczenia).
7. Gra się kończy, gdy wszystkie drużyny rozwiążą 7 zadań albo upłynie czas przeznaczony na grę – 30 minut.

Punktacja

Za poprawne rozwiązanie zadania drużyna otrzymuje odpowiednio

- Zadania A – łatwe – 3 punkty
- Zadania B – średnie – 4 punkty
- Zadania C – trudne – 5 punktów

Oceny

Nauczyciel prowadzący przyznaje ocenę zgodnie z punktacją:

Ocena	Otrzymane punkty w grze
celująca	33-35
bardzo dobra	30-32
dobra	24-29
dostateczna	18-23



SCENARIUSZ 18 – BEZ GRY ONLINE

ZAŁĄCZNIK NR 3

ZADANIE 1

A



B



C



ZADANIE 2

A



B



C



ZADANIE 3

A



B



C



ZADANIE 4

A



B



C



ZADANIE 5

A



B



C



ZADANIE 6

A



B



C



ZADANIE 7

A



B



C



Twierdzenie Pitagorasa i wskazywanie długości brakującego boku trójkąta prostokątnego



Czas trwania zajęć: jedna jednostka lekcyjna



Cel zajęć



Cele wynikające z podstawy programowej

Uczeń:

- stosuje twierdzenie Pitagorasa (10.7)
- korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i w trapezach (10.8)



Cele operacyjne osiągnane przez uczniów

Uczeń:

- oblicza długość przeciwprostokątnej, gdy zna długości przyprostokątnych trójkąta
- oblicza długość przyprostokątnej, gdy zna długości pozostałych boków
- oblicza wysokość trójkąta równoramiennego o znanych długościach boków
- stosuje twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa w celu sprawdzenia, czy trójkąt o podanych długościach boków jest: ostrokątny, prostokątny, czy rozwartokątny
- oblicza długość boku prostokąta, gdy zna długość drugiego boku i przekątnej
- oblicza wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, gdy zna długości krawędzi podstawy i krawędzi bocznej

Wiedza i umiejętności wejściowe ucznia

Uczeń potrafi przed lekcją:

- pierwiastkować liczby, w szczególności wyłączać czynnik kwadratowy przed pierwiastek, np. $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$
- podnosić do kwadratu liczby, w zapisie których występuje pierwiastek kwadratowy, np. $3\sqrt{2}$

- stosować zależność między długością boku, a długością przekątnej w kwadracie w obie strony, tak aby nie stosować do tego problemu twierdzenia Pitagorasa, a od razu mnożyć, albo dzielić przez $\sqrt{2}$



Organizacja lekcji

Infrastruktura

- Układ miejsc do pracy grupowej w zespołach trzyosobowych
- Urządzenie z dostępem do Internetu dla każdego z zespołów
- Rzutnik podłączony do komputera nauczyciela z dostępem do Internetu

Zasoby

- Gra sieciowa „Pitagorejczycy” dostępna na <http://gry ldc.edu.pl/>
- Załącznik nr 1 – Pitagorejczycy – instrukcji do gry
- Załącznik nr 2 – Pitagorejczycy – kartki do podziału na zespoły
- Załącznik nr 3 – Pitagorejczycy – tabele przydzielania do rozgrywek indywidualnych
- Załącznik nr 4 – Pitagorejczycy – treść zadań z kluczem odpowiedzi

Przygotowanie do lekcji

- Utworzenie rozgrywki w grze „Pitagorejczycy” dostępnej w <http://gry ldc.edu.pl/> w sposób opisany w Załączniku nr 1 – Pitagorejczycy – instrukcji do gry
- Wydrukowanie kartek do podziału na zespoły (Załącznik nr 2 – Pitagorejczycy – podział na zespoły)

Czynności po lekcji

- Utworzenie trzech indywidualnych domowych rozgrywek w grze „Pitagorejczycy” dostępnej w <http://gry ldc.edu.pl/> w sposób opisany w Załączniku nr 1 – Pitagorejczycy – instrukcji do gry
- Przesłanie zaproszeń do rozgrywek z wykorzystaniem (Załącznika nr 3 – Pitagorejczycy – podział na rozgrywki indywidualne)

Przebieg procesu dydaktycznego



LEKCJA

Czas: 5–7 min	Organizacja lekcji i podział na zespoły Podział na zespoły jest dokonywany zgodnie z <u>instrukcją do gry</u> <u>Załącznik nr 2 – Pitagorejczycy – kartki do podziału na zespoły</u>
Czas: 28–30 min	Gra Przeprowadzenie gry zgodnie z <u>instrukcją do gry</u> <u>Gra sieciowa „Pitagorejczycy” – ekrany uczniowskie na komputerach zespołów i ekran rankingu na rzutniku</u>
Czas: 7 min	Podsumowanie Jeśli drużyny okazały się mocne i większość skończyła przed planowanym czasem, warto omówić zadanie z ostatniego poziomu i wskazać drogę „na skróty” – czyli według wyprowadzonego wzoru, bez potrzeby wyznaczania konkretnych trójkątów pitagorejskich. Warto też w silnej klasie przedyskutować warunki na liczby m i n generujące trójkąty pitagorejskie. W przypadku słabszej klasy może się zdarzyć, że nikt nie otrzyma wieńca kończącego grę. Wtedy nauczyciel w odpowiednim momencie przerywa grę i omawia krótko najtrudniejsze momenty. Oceny: Warto ocenić zwycięskie drużyny np. szóstką dla pierwszej, piątką dla drugiej, plusy dla trzeciej w kolejności drużyny. System oceniania w grze premiuje bezbłędne i szybkie przechodzenie przez kolejne poziomy. <u>Gra sieciowa „Pitagorejczycy” – ekrany rankingu i statystyk na rzutniku</u>

Czas: 3 min

Zadanie domowe

Nauczyciel postępując zgodnie z instrukcją do gry zapisuje uczniów do trzech indywidualnych, domowych rozgrywek gry „Pitagorejczycy”, których rozegranie stanowi zadanie domowe

[Załącznik nr 3 – tabele przydzielania do rozgrywek indywidualnych](#)

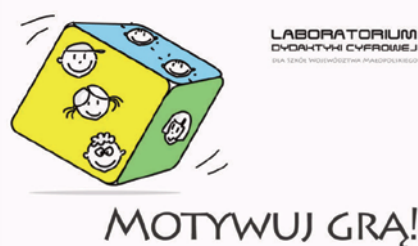
Informacje metodyczne

Metodyka lekcji

Gamifikacja pomaga motywować uczniów w sposób wewnętrzny. Natychmiastowe punktowanie osiągnięć, sygnalizowanie przejścia do kolejnego poziomu, bezpośredni i interaktywny udział ucznia – to zarówno wymagania jak i atuty gamifikacji. Jeśli uda się równoważyć potrzebę nauczania konkretnego materiału z zaplanowaną ciekawą mechaniką fragmentów gry – niemal każda lekcja stanie się dla uczniów interesującym wyzwaniem.

Warto zwrócić uwagę na sposób podziału na zespoły – tutaj wybrano metodę losową, zapobiegającą celowemu dobraniu zespołów lepszych i słabszych. Sama praca zespołowa w grze, uczy w naturalnych dla uczniów okolicznościach umiejętności współpracy, którą mogą łatwo przenieść na inne modele edukacyjne.

ZOBACZ FILM INSTRUKTAŻOWY



Metodyka lekcji

Zastosowanie gry zespołowej z automatyczną oceną jest możliwe tylko przy zadaniach zamkniętych, w sposób naturalny poddających się takiej formie oceniania.

Gra „Pitagorejczycy” pokazuje jednak, że zadania zamknięte nie muszą mieć wyłącznie charakteru powtórkowego lub sprawdzającego – mogą też wymagać myślenia i opracowywania strategii rozwiązań.

Oprogramowanie gry „Pitagorejczycy” zostało przygotowane jednorazowo przez zespół informatyczny spółki Eduintegrator z grupy PWN – wykonawcy zlecenia LDC, ale podobne, choć mniej fabularyzowane i prostsze graficznie, gry można utworzyć samodzielnie w sieciowych platformach gamifikacyjnych. Jedna z nich – Educhmura z platformą gamifikacyjną PWN zostanie udostępniona w ramach projektu LDC. Możliwe jest też przygotowanie i przeprowadzenie gry w oparciu o standardowe narzędzia Google.

ZOBACZ PORADNIK GAMIFIKACJA



SCENARIUSZ 18 – Z GRĄ ONLINE

ZAŁĄCZNIK NR 1 – PITAGOREJCZYCY – INSTRUKCJA DO GRY

Podstawowe informacje

Pitagorejczycy to sieciowa gra zespołowa przeznaczona do wykorzystania w sposób synchroniczny na lekcji w tradycyjnej klasie. Gra zawiera w sobie standardowe elementy gamifikacji jako metody motywującej w edukacji:

- ekran rankingu – pokazującego postępy zespołów w metaforze inicjacji w stowarzyszeniu Pitagorejczyków;
- ekrany uczniowskie dla każdego z trzysobowych zespołów – na nich wykonywane są zadania.

Gra może też zostać wykorzystana alternatywnie jako indywidualna gra domowa z rankingiem osobnym dla ośmioosobowych rozgrywek – takie uzupełniające zastosowanie opisano na końcu instrukcji.

Czynności przed lekcją

Przygotowanie rozgrywek

Wchodzimy do panelu zarządzania grami pod adresem <http://gry ldc edu pl/> i logujemy się za pomocą własnego konta Google.

ZOBACZ FILM INSTRUKTAŻOWY



Uwaga! Będziemy w tej instrukcji rozróżniać dwa określenia:

- gra – jako określenie ogólnego typu gry ze zdefiniowanymi zasadami (jak np. szachy, czy tutaj gra „Pitagorejczycy”);
- rozgrywka – konkretna gra rozgrywana przez konkretne osoby w konkretnym czasie – w szachach nazwalibyśmy ją „partią”.

Panel zawiera listę rozgrywek zainicjowanych przez Ciebie. Lista jest na początku pusta. Żeby utworzyć nową rozgrywkę wybierz przycisk „Dodaj nową”.



Na oknie dialogowym wybierz typ gry „Pitagorejczycy” oraz nadaj nazwę rozgrywce – może to być po prostu nazwa klasy – data dodania rozgrywki zostanie dopisana samoczynnie.

Rozgrywka jest gotowa.

Pod ikoną linku dostępne są dwa ekrany:

- link dla uczniów – należy go przekazać uczniom wcześniej, tak, żeby mogli go uruchomić od razu na komputerach (lub innych urządzeniach) w klasie;
[zobacz film „Jak udostępnić uczniom materiały znalezione w sieci?”]
- link do rankingu – należy uruchomić w czasie lekcji na komputerze podłączonym do rzutnika;

(dla każdej rozgrywki generowane są unikalne linki dla, prosimy nie przepisywać tych widocznych poniżej).

Wydrukowanie kart do podziału klasy na zespoły

Wydrukuj załącznik i potnij wzdłuż wskazanych linii na kartki tworzące zestawy liczb odpowiadających długościom trzech boków trójkąta prostokątnego (w każdym wierszu jeden trójkąt).

3	4	5
6	8	10
30	40	50
5	12	13
10	24	26
8	15	17
300	400	500
50	120	130

Na lekcji

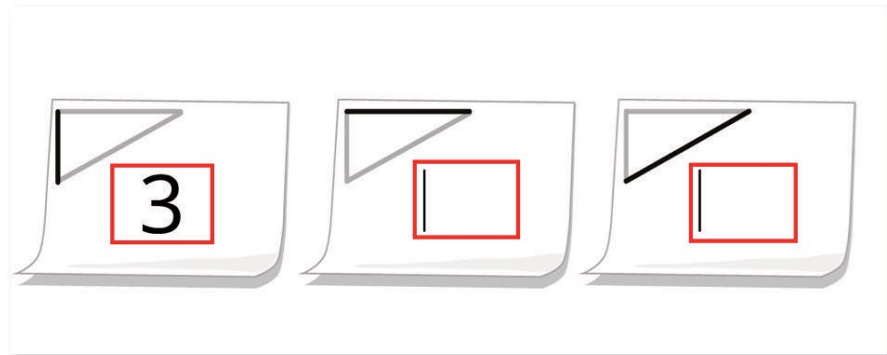
Dzielnie klasy na zespoły

Uczniowie losują pojedyncze kartki i dobierają się w zespoły znajdując pasujące do siebie liczby (takie, które stanowią łącznie długości boków pewnego trójkąta prostokątnego).

Żeby zadanie nie było za trudne, każda z trzech liczb w pojedynczym zestawie oznaczona jest odpowiednim bokiem trójkąta (pionową i poziomą przyprostokątną oraz przeciwprostokątną). W ten sposób uczniowie utworzą trzyosobowe grupy.

Rozpoczynamy rozgrywkę – wybór awatara

Link dla uczniów otwiera ekran (na komputerze każdej grupy), na którym znajdują się trzy pola edycji służące do przepisania długości poszczególnych boków trójkąta z karteczek identyfikujących zespoły.



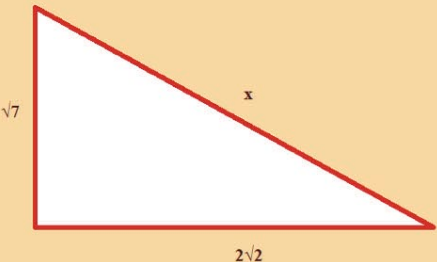
Dla uniknięcia nieporozumień każde z pól oznaczone jest, podobnie jak wcześniej karteczki, odpowiednio:

- pionową przyprostokątną
- poziomą przyprostokątną
- przeciwprostokątną

Zaraz po wpisaniu prawidłowych wartości, zespół otrzyma swojego awatara (jednego z historycznych Pitagorejczyków), a zaraz po tym pojawi się ekran z zadaniami.

NOWICJUSZ Trójki pitagorejskie.

Wskaż długość przeciwprostokątnej.



☐ 15
 ☐ 11
 ☐ $\sqrt{113}$
☐ $\sqrt{57}$
☐ 4
 ☐ $\sqrt{15}$

SPRAWDŹ



5

PRÓBA I

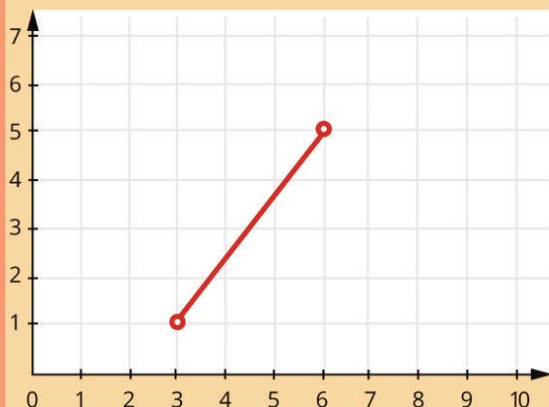
Na ekranie zadań widać:

- Na górze nazwę poziomu wtajemniczenia, który przechodzimy i tytuł zadania.
- Po prawej stronie nasz awatar wraz liczbą punktów, które możemy zdobyć rozwiązując zadanie w najbliższej próbie.
- Poniżej awatara informację, którą próbę dla danego poziomu podejmujemy.
- W centralnym polu znajduje się samo zadanie w postaci testu jednokrotnego wyboru.

Jeżeli rozwiążemy zadanie w pierwszej próbie, przejdziemy na wyższy poziom uzyskując 5 punktów, a ekran naszego ćwiczenia zmieni odpowiednio kolor i opis.

PRAKTYKANT Długość odcinka o końcach kratowych

Wskaż długość odcinka AB



- ☐ 7
- ☐ 6
- ☒ 5
- ☐ 4
- ☐ $5\sqrt{2}$
- ☐ $2\sqrt{5}$

SPRAWDŹ

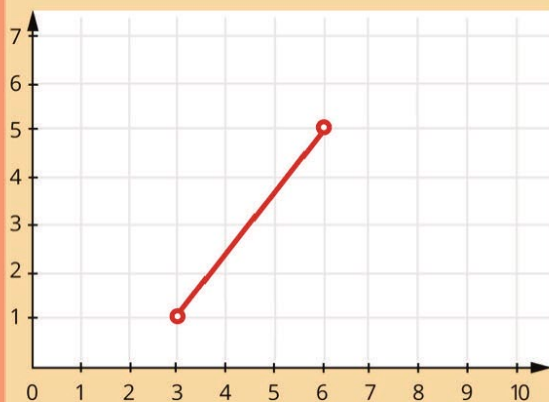


Próba I

Jeżeli nam się nie uda, przejdziemy do kolejnej próby na tym samym poziomie. Każda z czterech dostępnych prób zmniejsza o jeden liczbę punktów zdobywanych przy przejściu na kolejny poziom, aż do jednego. Użycie podpowiedzi dostępnej przy ostatniej (czwartej) próbie doprowadzi nas do kolejnego poziomu, ale bez uzyskania jakichkolwiek punktów.

PRAKTYKANT Długość odcinka o końcach kratowych

Wskaż długość odcinka AB



- ☐ 7
- ☐ 6
- ☒ 5
- ☐ 4
- ☐ $5\sqrt{2}$
- ☐ $2\sqrt{5}$

SPRAWDŹ



Próba I

taki sam zrzut jak wyżej

Ranking

Od samego początku na widocznym dla wszystkich ekranie nauczyciel wyświetla ranking. Początkowo ekran zawiera tylko stopnie do przejścia – każdy z nich odpowiednio nazwany w sposób sugerujący poziomy inicjacji w stowarzyszeniu Pitagorejczyków. W czasie gdy zespoły wchodzi do gry wpisując właściwe trzy liczby na swoim ekranie startowym, ich awatary pojawiają się na dolnym stopniu rankingu.



Gdy któryś z zespołów przechodzi na wyższy poziom wtajemniczenia odpowiedni awatar przesuwa się o stopień w górę, a pod nim pojawia się liczba zdobytych punktów.

Dzięki temu cała klasa może rozwiązując zadania przy komputerach w swoich zespołach obserwować jednocześnie na ekranie rzutnika całe współzawodnictwo, aż do ukończenia gry przez ostatni zespół. Następuje wtedy udekorowanie awatarów wieńcami w kolorach symbolizujących ich osiągnięcia.



Statystyki

Wyniki każdej rozgrywki są zapisywane i widoczne w panelu zarządzania grami pod ikoną wykresu.

Niepotrzebne rozgrywki możemy skasować używając ikony krzyżyka.



Pitagorejczycy jako indywidualna gra domowa

Gra może też zostać wykorzystana asynchronicznie np. do zadania domowego.

W tym celu należy utworzyć osobne rozgrywki dla maksymalnie ośmioosobowych grup i zaprosić uczniów do wygenerowanych rozgrywek (podając im odpowiednie linki) po uprzednim podzieleniu uczniów na takie właśnie grupy.

- Czynności te ułatwia znacznie tabela stanowiąca Załącznik nr 3 – Pitagorejczycy – tabele do rozgrywek indywidualnych



SCENARIUSZ 18 – Z GRĄ ONLINE

ZAŁĄCZNIK NR 2 – KARTY DO PODZIAŁU NA ZESPOŁY

3	4	5
6	8	10
30	40	50
5	12	13
10	24	26
8	15	17
300	400	500
50	120	130



SCENARIUSZ 18 – Z GRĄ ONLINE

ZAŁĄCZNIK NR 3 – PITAGOREJCZYCY – TABELA DO GENEROWANIA
ROZGRYWEK INDYWIDUALNYCH

Grupa „pozioma”

Wpisują się uczniowie, którzy wylosowali na początku lekcji kartki z oznaczeniem „poziomej” przyprostokątnej.

trójkąt	uczeń
3-4-5	
6-8-10	
30-40-50	
5-12-13	
10-24-26	
8-15-17	
300-400-500	
50-120-130	

Grupa „pionowa”

Wpisują się uczniowie, którzy wylosowali na początku lekcji kartki z oznaczeniem „pionowej” przyprostokątnej.

trójkąt	uczeń
3-4-5	
6-8-10	
30-40-50	
5-12-13	
10-24-26	
8-15-17	
300-400-500	
50-120-130	

Grupa „ukośna”

Wpisują się uczniowie, którzy wylosowali na początku lekcji kartki z oznaczeniem przeciwprostokątnej.

trójkąt	uczeń
3-4-5	
6-8-10	
30-40-50	
5-12-13	
10-24-26	
8-15-17	
300-400-500	
50-120-130	



SCENARIUSZ 18 – Z GRĄ ONLINE

ZAŁĄCZNIK NR 4 – PITAGOREJCZYCY – TREŚĆ ZADAŃ

Z KLUCZEM ODPOWIEDZI

Poziom 1. (Nowicjusz)

Trójkąty pitagorejskie. Na ekranie komputera wyświetla się trójkąt z zaznaczonymi długościami przyprostokątnych. Należy wskazać właściwą długość przeciwprostokątnej, spośród 6 zaproponowanych.

Polecenie: Wskaż długość przeciwprostokątnej.

Trójkąt 1: (**$\sqrt{7}$, $2\sqrt{2}$, x**). Propozycje x : 15, 11, $\sqrt{113}$, $\sqrt{57}$, $4\sqrt{15}$

Trójkąt 2: (**$2\sqrt{3}$, 2 , x**). Propozycje x : $\sqrt{10}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{11}$, $\frac{4}{3}$, $\sqrt{8}$, 16

Trójkąt 3: (**9, 40, x**). Propozycje x : 40, 39, $\frac{41}{5}$, 42, 44, 49

Trójkąt 4: (**7, 24, x**). Propozycje x : $\frac{25}{2}$, 29, 27, 31, 32, 26

Wskazówka po 4. próbie: $x^2 = a^2 + b^2$

Poziom 2. (Praktykant)

Długość odcinka o końcach kratowych. Na ekranie w układzie współrzędnych (I ćwiartka) z narysowaną jednostkową siatką zaznaczone są dwa punkty A i B. Należy wskazać długość odcinka AB.

Polecenie: Wskaż długość odcinka AB.

Odcinek 1: **A = (2,7), B = (8,3)**. Propozycje długości: 7, 8, 9, $2\sqrt{13}$, $13\sqrt{2}$, $\sqrt{54}$

Odcinek 2: **A = (1,2), B = (8,3)**. Propozycje długości: $\sqrt{52}$, $4\sqrt{3}$, 7, 8, $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $2\sqrt{5}$

Odcinek 3: **A = (3,1), B = (6,5)**. Propozycje długości: 7, 6, 5, 4, $5\sqrt{2}$, $2\sqrt{5}$

Odcinek 4: **A = (0,0), B = (5,12)**. Propozycje długości: $4\sqrt{10}$, $10\sqrt{3}$, $12\sqrt{5}$, 13, 14, 15

Wskazówka po 4. próbie:

Na rysunku pojawia się trójkąt prostokątny, w którym odcinek AB jest przeciwprostokątną.

Poziom 3. (Wtajemniczony)

Rodzaj trójkąta. Zastosowanie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa. Na ekranie podane są długości boków trójkąta. Należy sprawdzić, czy trójkąt jest prostokątny.

Polecenie: Czy trójkąt o podanych długościach boków jest prostokątny? Wskaż odpowiedź

Trójkąt 1: (**8, 40, 41**). NIE

Trójkąt 1: (**16, 30, 33**) NIE

Trójkąt 2: **(21, 20, 30)** NIE

Trójkąt 3: **(10, 24, 26)** TAK

Wskazówka po 4. próbie: Tylko jeśli $a^2 + b^2 = c^2$ (gdzie c jest największą długością boku) trójkąt jest prostokątny.

Poziom 4. (Młodszy Praktyk)

Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do obliczania pola trójkąta równoramiennego. Na ekranie widać trójkąt równoramienny z zaznaczonymi długościami boków. Należy wskazać pole trójkąta, po uprzednim obliczeniu długości wysokości.

Polecenie: Wskaż pole trójkąta o podanych długościach boków.

Trójkąt 1: **(8, 13, 13)**. Propozycje pola: 49, 50, 4√153, $17\sqrt{12}$, $12\sqrt{17}$, $2\sqrt{153}$

Trójkąt 2: **(9, 9, 10)**. Propozycje pola: $20\sqrt{14}$, $10\sqrt{14}$, $2\sqrt{56}$, 5√56, 37, 38

Trójkąt 3: **(16, 17, 17)**. Propozycje pola: 110, 116, 120, 240, 128, 130

Trójkąt 4: **(10, 13, 13)**. Propozycje pola: 60, 62, 120, 75, 78, 90

Wskazówka po 4. próbie: Na rysunku pojawia się wysokość opuszczona na podstawę i podświetla się odpowiedni trójkąt prostokątny.

Poziom 5: (Starszy Praktyk)

Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do obliczenia pola rombu o podanym obwodzie i długości jednej z przekątnych. Należy wskazać pole rombu. Na rysunku widać romb z zaznaczoną właściwą przekątną. Wzór na pole z długości przekątnych jest widoczny na ekranie.

Polecenie: Wskaż pole rombu o obwodzie L i przekątnej długości p .

Romb 1: **($L=8\sqrt{10}$, $p=2\sqrt{15}$)**. Propozycje pola: $10\sqrt{15}$, $10\sqrt{40}$, 40, 38, $50\sqrt{5}$, $30\sqrt{10}$

Romb 2: **($L=4\sqrt{19}$, $p=4$)**. Propozycje pola: $8\sqrt{15}$, $4\sqrt{15}$, $4\sqrt{19}$, $8\sqrt{19}$, 14, 16

Romb 3: **($L=68$, $p=30$)**. Propozycje pola: 90, 120, 240, 480, 500, 544

Romb 4: **($L=60$, $p=24$)**. Propozycje pola: 90, 108, 175, 190, 200, 216

Wskazówka po 4. próbie: Na rysunku pojawia się druga przekątna i podświetlony jest odpowiedni trójkąt prostokątny.

Poziom 6. (Znawca)

Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do wyznaczenia przekątnej prostopadłościanu.

Na ekranie widać rysunek prostopadłościanu z zaznaczoną przekątną i podanymi długościami krawędzi podstawy i wysokości. Należy wskazać długość przekątnej tego prostopadłościanu.

Polecenie: Wskaż długość przekątnej prostopadłościanu.

Prostopadłościan 1: (**$2\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$, $\sqrt{70}$**). Propozycje dł. przekątnej: $\sqrt{106}$, 10, 11, $\sqrt{99}$, $4\sqrt{6}$, 12

Prostopadłościan 2: (**$\sqrt{15}$, 7, 6**). Propozycje dł. przekątnej: 8, 9, 10, $\sqrt{101}$, $\sqrt{115}$, $2\sqrt{29}$

Prostopadłościan 3: (**3, $2\sqrt{6}$, 4**). Propozycje dł. przekątnej: $3\sqrt{5}$, $\sqrt{47}$, $4\sqrt{3}$, 7, 8, 9

Prostopadłościan 4: (**3, 4, 12**). Propozycje dł. przekątnej: 11, 12, 13, 14, $\sqrt{170}$, $6\sqrt{5}$

Wskazówka po 4. próbie: Na rysunku, wewnątrz prostopadłościanu, pojawia się odpowiedni trójkąt prostokątny.

Poziom 7. (Ekspert)

Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa do wyznaczenia wysokości ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Na ekranie widać ostrosłup z wyświetlonymi długościami krawędzi podstawy a oraz krawędzi bocznej b. Należy wskazać długość wysokości tego ostrosłupa.

Polecenie: Wskaż długość ostrosłupa.

Ostrosłup 1: (**$a=\sqrt{2}$, $b=10$**). Propozycje dł. wysokości: 7, $\sqrt{99}$, $\sqrt{17}$, 9, $2\sqrt{7}$, $7\sqrt{2}$

Ostrosłup 2: (**$a=6$, $b=\sqrt{34}$**). Propozycje dł. wysokości: 4, 6, 8, $2\sqrt{5}$, $2\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$

Ostrosłup 3: (**$a=6\sqrt{2}$, $b=10$**). Propozycje dł. wysokości: 5, 6, 8, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$

Ostrosłup 4: (**$a=4\sqrt{2}$, $b=5$**). Propozycje dł. wysokości: 2, 3, 6, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$

Poziom 8. (Pitagorejczyk)

Na ekranie wyświetla się:

PRZEPIS NA TRÓJKI PITAGOREJSKIE

Pomyśl dwie liczby naturalne dodatnie m i n, takie, że:

- $m > n$
- m i n nie mają wspólnego dzielnika (poza 1)
- jedna z tych liczb jest parzysta, a druga nieparzysta (obojętnie która).

Wówczas liczby **$a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$** są całkowitymi długościami boków PEWNEGO trójkąta prostokątnego. Mówiąc inaczej, trójka **$a - b - c$** jest „pitagorejska”, jak np. 3–4–5.

Przykład: Przyjmijmy takie dwie liczby: $m = 2$, $n = 1$.

Wtedy **$a = 2^2 - 1 = 3$, $b = 2 * 2 * 1 = 4$, $c = 2^2 + 1 = 5$** , co daje 3–4–5!

Uwaga: Ten przepis nie tworzy trójek zwielokrotnionych, takich jak: 6–8–10, czyli dwukrotności trójki 3–4–5.

Zadanie . Dla podanych liczb m i n należy wskazać obwód trójkąta prostokątnego wygenerowanego przez te liczby.

Przypadek 1. $m = 15$, $n = 4$. Propozycje obwodów: 500, 520, 530, 555, 560, 570

Przypadek 2. $m = 10$, $n = 5$. Propozycje obwodów: 300, 320, 330, 355, 360, 370

Przypadek 3. $m = 20$, $n = 1$. Propozycje obwodów: 700, 780, 790, 800, 840, 860

Przypadek 4. $m = 5$, $n = 4$. Propozycje obwodów: 25, 26, 30, 32, 33, 90



**LABORATORIUM
DYDAKTYKI CYFROWEJ**

DLA SZKÓŁ WOJEWÓDZTWA
MAŁOPOLSKIEGO